

Short Summary

Cartier-Foata-Garside Monoids and Groups

Alexander Thumm

This doctoral thesis explores the rich mathematical landscape of Cartier-Foata-Garside monoids and groups, encompassing free partially commutative monoids, Garside monoids, and their respective universal groups. These structures are examined through the lens of greedy reduction, which, in the case of groups, is grounded in a novel calculus of ratios. This unified approach serves as the foundation for an in-depth exploration of the algebraic, combinatorial, and geometric properties of these monoids and groups.

Greedy reduction is employed to first address the word problem for Cartier-Foata-Garside monoids and groups, and to then demonstrate that every strong Cartier-Foata-Garside monoid embeds into its universal group. This work also reveals that such monoids and groups exhibit automatic structures, and establishes the torsion-free nature of the latter. Moreover, it is shown that classifying spaces for these groups emerge from an adapted bar construction, which subsumes several previous ad-hoc methods. The theory developed throughout this work is illustrated through specific examples: free partially commutative groups, Artin-Tits groups of FC type, and Baumslag-Solitar groups.

Kurzzusammenfassung
Cartier-Foata-Garside Monoids and Groups

Alexander Thumm

Diese Doktorarbeit untersucht das reichhaltige mathematische Gebiet der Cartier-Foata-Garside Monoide und Gruppen, die freie partiell kommutative Monoide, Garside Monoide und deren jeweilige universelle Gruppen umfassen. Diese Strukturen werden mithilfe der Greedy-Reduktion betrachtet, die im Fall von Gruppen auf einem neuartigen Kalkül von Verhältnissen basiert. Dieser einheitliche Ansatz bildet die Grundlage für eine eingehende Untersuchung der algebraischen, kombinatorischen und geometrischen Eigenschaften der betrachteten Monoide und Gruppen.

Die Greedy-Reduktion wird verwendet, um zunächst das Wortproblem für Cartier-Foata-Garside Monoide und Gruppen zu lösen und dann zu zeigen, dass jedes starke Cartier-Foata-Garside Monoid sich in seine universelle Gruppe einbettet. Diese Arbeit zeigt außerdem, dass solche Monoide und Gruppen automatische Strukturen besitzen und dass letztere torsionsfrei sind. Darüber hinaus wird gezeigt, dass klassifizierende Räume für diese Gruppen aus einer angepassten Bar-Konstruktion entstehen, die mehrere bereits bekannte Ad-Hoc-Methoden als Spezialfälle beinhaltet. Die im Laufe dieser Arbeit entwickelte Theorie wird anhand spezifischer Beispiele illustriert: freie partiell kommutative Gruppen, Artin-Tits Gruppen vom FC-Typ und Baumslag-Solitar Gruppen.