Zusammenfassung: Quasi Continuous Level Monte Carlo Method

Cedric Aaron Beschle

23. Juli 2024

Die Monte Carlo Methode ist die Standardmethode bei der stichprobenbasierten Quantifizierung von Unsicherheiten. Die Methode ist einfach und sehr robust in ihrer Anwendung, aber nicht optimal in Bezug auf die Zeit-Fehler-Komplexität. Die multilevel Monte Carlo Methode (MLMC) hat das Potenzial, die Rechenzeit stochastischer Simulationen immens zu verringern, ist jedoch nicht erwartungstreu und kombiniert Stichproben von Lösungsapproximationen in einer starren Struktur. Die kürzlich entwickelte continuous level Monte Carlo (CLMC) Methode ist eine allgemeine Erweiterung der MLMC Methode. Sie ist in der Lage, sich an das stochastische Problem anzupassen, indem sie sowohl uniforme als auch adaptive Diskretisierungen zulässt. Darüber hinaus ist der CLMC Schätzer im Fall optimaler Zeit-Fehler-Komplexität erwartungstreu. Numerische Studien zeigen jedoch, dass die Stichprobenentnahme der zugrundeliegenden Levelverteilung von CLMC durch unabhängige Stichproben zu einer hohen Varianz des Schätzers führen kann. Wir widmen uns in dieser Dissertation der Untersuchung und Lösung dieses Nachteils von CLMC, um diese allgemeine und theoretisch vorteilhafte Methode für ein breites Spektrum praktischer Anwendungen verfügbar zu machen. Das Ergebnis unserer Arbeit ist die neu entwickelte quasi continuous level Monte Carlo (QCLMC) Methode. Wir schlagen die Verwendung von deterministischen Quasi-Zufallszahlen im Gegensatz zu unabhängigen Zufallsstichproben für die Stichprobenentnahme der zugrundeliegenden Levelverteilung vor. Quasi-Zufallszahlen sind deterministische Zahlenfolgen mit verbesserten Verteilungseigenschaften. Wir beweisen die asymptotische Erwartungstreue der QCLMC Methode zusammen mit einem Komplexitätstheorem. Dieses Komplexitätstheorem weist die gleichen asymptotischen Konvergenzraten wie die MLMC und CLMC Methode auf, allerdings mit dem Vorteil einer potentiell weitaus niedrigeren Kostenkonstante. Zusätzlich zu den theoretischen Errungenschaften entwickeln wir Routinen zur Optimierung der Zeit-Fehler-Performanz für QCLMC, CLMC und MLMC, um sie numerisch miteinander vergleichen zu können. Dieser Performanzvergleich wird für verschiedene Definitionen des Diffusionskoeffizienten einer linearen elliptischen partiellen Differentialgleichung und für ein nichtlineares zeitabhängiges hyperbolisches Erhaltungsgesetz mit zwei verschiedenen zufälligen Anfangsbedingungen durchgeführt. Die durchgeführten Experimente zeigen die Optimalität der QCLMC Methode in der praktischen Anwendung im Vergleich zur CLMC Methode in Bezug auf ihre jeweilige Zeit-Fehler-Performanz. Außerdem verhält sich die optimierte QCLMC Methode in der Zeit-Fehler-Performanz ähnlich wie ein optimierter adaptiver MLMC Schätzer. Dies zeigt, dass die neu entwickel-

te QCLMC Methode die großartigen theoretischen Eigenschaften des CLMC Schätzers besitzt und gleichzeitig in Bezug auf ihre Zeit-Fehler-Performanz optimal ist.

Abstract: Quasi Continuous Level Monte Carlo Method

Cedric Aaron Beschle

July 23, 2024

The Monte Carlo method is the classical method in sampling based uncertainty quantification. It is simple and very robust in its application, but not optimal in terms of time-to-error complexity. The multilevel Monte Carlo (MLMC) method has the potential to immensely reduce the computational time of stochastic simulations, however, it is biased and it combines approximation samples in a rigid structure. The recently developed continuous level Monte Carlo (CLMC) method is a general extension to the MLMC method. It is able to adapt to the stochastic problem by allowing for uniform as well as adaptive discretizations naturally. Furthermore, the CLMC estimator is unbiased in the optimal time-to-error complexity case. However, numerical studies show, that sampling the underlying level distribution of CLMC by independent random samples may lead to a high variance of the estimator. We devote this dissertation to investigating and resolving this drawback of CLMC in order to make this general and theoretically advantageous method available for a wide range of practical applications. The outcome of our work is the newly developed quasi continuous level Monte Carlo (QCLMC) method. It is a modification of CLMC using deterministic quasi-random samples as opposed to independent random samples for sampling the underlying level distribution. Quasi-random numbers are deterministic number sequences with improved distributional properties over independent random samples. We proof an asymptotic unbiasedness of the QCLMC method together with a complexity theorem. This complexity theorem exhibits the same asymptotic convergence rates as the MLMC and CLMC method, however, with the benefit of a potentially much lower cost constant. In addition to the theoretical achievements, we develop routines to optimize the time-to-error performances for QCLMC, CLMC and MLMC, respectively, to be able to compare them against each other numerically. This performance comparison is conducted for various definitions of the diffusion coefficient of a linear elliptic partial differential equation and for a nonlinear time-dependent hyperbolic conservation law with two different random initial conditions. The performed experiments demonstrate the practical optimality of the QCLMC method compared to the CLMC method in terms of their respective time-to-error performance. Moreover, the optimized QCLMC method performs alike an optimized adaptive MLMC estimator. This demonstrates that the newly developed QCLMC method possesses the great theoretical properties of the CLMC estimator and is optimal in terms of its time-to-error performance.