

Wie lernt man beweisen? – der ultimative Spickzettel

Warnung

Dieses Dokument enthält wirksame Tipps. Das Lesen dieses Dokuments kann dazu führen, dass Sie in Zukunft Beweise und deren Formulierungen strukturierter angehen. Zu Risiken und Nebenwirkungen fragen Sie Ihre Dozent:innen, Assistent:innen, Tutor:innen oder die Studiengangsmanagerin!

In Ihrem Mathematik-Studium und auch außerhalb werden Sie sich wünschen, dass Sie folgendes können:

- Vorhandene Sätze verstehen und ihre Beweise nachvollziehen.
- Jedes Argument auf Korrektheit prüfen und gegebenenfalls widerlegen.
- Selbst Beweise entwickeln, und zwar so, dass auch andere Ihre Argumente verstehen.
- Und schließlich relevante Sätze selbst finden, formulieren und beweisen.

Diese Fähigkeiten erlernt man nicht so einfach. Einen neuen – interessanten und zugleich wahren – Satz zu finden, ist eine Kunst. Den ersehnten Satz zu beweisen, kann sich über mehrere Jahrzehnte strecken, schlimmstenfalls bleibt er als Vermutung unbewiesen. Viele Beweise verlaufen über Zwischenschritte und Hilfsaussagen, die zu finden viel Kreativität und Erfahrung benötigt. Die gute Nachricht: Es gibt grundsätzliche Techniken, die Sie beherrschen sollten und die Ihnen das Beweisen erleichtern. Dadurch wird Ihnen klarer, was eigentlich zu zeigen ist und wie Sie Ihre Gedanken gut aufs Papier bringen.

Sätze richtig formulieren: Haben und Soll

Bevor Sie einen Satz beweisen, sollten Sie seine Aussage korrekt formulieren und verstehen. Diese besteht aus zwei Teilen:

H das Haben: alle Annahmen, mit denen Sie starten; Daten (gegebene Elemente, Mengen, Objekte, für die Sie etwas zeigen wollen) und Voraussetzungen (Aussagen, Forderungen, Prämissen, Axiome, deren Gültigkeit Sie annehmen),

S das Soll: die Zielaussage / Folgerung / Behauptung, die Sie aus den Annahmen ableiten wollen.

Wenn Sie sich klar machen, was Haben **H** und Soll **S** sind, was gegeben und was zu zeigen ist, dann verstehen Sie die Aussage des Satzes besser. Die Einteilung in Haben und Soll hilft Ihnen auch beim Formulieren: Sind etwa Elemente $x \in X$ und $y \in Y$ gegeben, für die die Annahme P gilt (**H**), und daraus soll die Aussage R folgen (**S**), dann können Sie den Satz so formulieren:

- Seien $x \in X$ und $y \in Y$. Es gelte P . Dann folgt R .
- Angenommen $x \in X$ und $y \in Y$ erfüllen P . Dann gilt R .
- Gegeben seien $x \in X$ und $y \in Y$ mit Eigenschaft P . Dies impliziert R .

Logisch korrekt beweisen: schrittweise vom Start zum Ziel

Das Ziel eines Beweises ist, auf der Habenseite **H** solange neue Aussagen abzuleiten, bis Sie dort das Soll **S** finden. Das bedeutet, Sie folgern schrittweise neue Aussagen: Verwenden dürfen Sie alle bereits gezeigten Aussagen auf der Habenseite **H**, ebenso Definitionen und Sätze, die bereits gezeigt wurden. Die neu gefolgerten Aussagen nehmen Sie ins Haben **H** auf, bis schließlich das Soll **S** gezeigt ist.

Wie gelingt Ihnen das logisch korrekt? Wie dokumentieren Sie dies gut nachvollziehbar? Wichtig ist der korrekte Umgang mit aussagenlogischen Ausdrücken. Dabei spielt eine Rolle, ob eine Aussage auf der Habenseite **H** oder auf der Sollseite **S** auftritt! Die folgende Tabelle gibt eine Anleitung, wie Sie Aussagen bearbeiten, das Haben **H** erweitern und das Soll **S** abbauen.

Aussage	Anwendung / Umformung	mögliche Formulierung im Beweis
$\forall x \in X : P(x)$	H Sobald Sie ein Element $x_0 \in X$ konstruieren haben (H), können Sie $\forall x \in X : P(x)$ darauf anwenden. Es folgt $P(x_0)$ So erhalten wir $x_0 \in X$. Aus $\forall x \in X : P(x)$ folgt $P(x_0)$.
	S Um diese Aussage zu zeigen, nehmen Sie $x \in X$ im Haben H auf, und die Aussage $P(x)$ wird zum neuen Soll S .	Sei $x \in X$. Dann gilt ... Schließlich folgt $P(x)$. Da $x \in X$ beliebig war, gilt $\forall x \in X : P(x)$.
$\exists x \in X : P(x)$	H Sie nehmen ein $x_0 \in X$ und $P(x_0)$ im Haben H auf.	Dank $\exists x \in X : P(x)$ existiert ein $x_0 \in X$ mit $P(x_0)$.
	S Sie geben ein passendes $x_0 \in X$ an und zeigen $P(x_0)$.	Wir setzen $x_0 := \dots \in X$ Daraus folgt $P(x_0)$.
$P \wedge Q$	H Aus $P \wedge Q$ werden zwei Annahmen P und Q im Haben H .	Wir wissen bereits, dass P und Q gelten. ...
	S Aus $P \wedge Q$ werden zwei Ziele P und Q im Soll S . Diese werden nacheinander gezeigt.	Wir zeigen zunächst P : ... Nun zeigen wir Q : ... Damit ist $P \wedge Q$ gezeigt.
$P \vee Q$	H Sie unterscheiden zwei Fälle, P bzw. Q , und zeigen das Soll S : Aus P folgt das Soll S . Aus Q folgt das Soll S .	Angenommen, es gilt P : ... Daraus folgt die Behauptung. Angenommen, es gilt Q : ... Daraus folgt die Behauptung.
	S Um $P \vee Q$ zu beweisen, zeigen Sie P , oder Sie zeigen Q . Falls nötig mit Fallunterscheidung, siehe oben.	Wir zeigen P : ... – oder – Wir zeigen Q : ... – oder – Falls ... und es folgt P . Andernfalls ... und es folgt Q .
$P \Rightarrow Q$	H Ist P bereits im Haben H , so folgt Q . Ist auch $Q \Rightarrow R$ im Haben H , so folgt $P \Rightarrow R$. Steht Q im Soll S , so kann man dort Q ersetzen durch P .	Aus P und $P \Rightarrow Q$ folgt Q . – oder – Aus $P \Rightarrow Q$ und $Q \Rightarrow R$ folgt $P \Rightarrow R$. – oder – Zu zeigen ist Q . Wegen $P \Rightarrow Q$ genügt es, P zu zeigen.
	S Die Annahme P kommt ins Haben H , das Soll S wird zu Q .	Angenommen, es gilt P . Dann gilt ... Daraus folgt Q .
$P \Leftrightarrow Q$	Die Äquivalenz ist gleichbedeutend zu $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$. Dies kann mit Hilfe der obigen Schritte aufgelöst werden.	

Richtig negieren

Aussage A	Negation $\neg A$
$P \wedge Q$	$\neg P \vee \neg Q$
$P \vee Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
$P \Rightarrow Q$	$P \wedge \neg Q$
$\forall x \in X : P(x)$	$\exists x \in X : \neg P(x)$
$\exists x \in X : P(x)$	$\forall x \in X : \neg P(x)$

Negieren am Beispiel

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ nennen wir *injektiv*, falls gilt:
 $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Eine solche Abbildung ist genau dann nicht injektiv, wenn gilt:

$$\begin{aligned} & \neg(\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2) \\ \Leftrightarrow & \exists x_1, x_2 \in X : \neg(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2) \\ \Leftrightarrow & \exists x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \wedge \neg(x_1 = x_2) \\ \Leftrightarrow & \exists x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2) \end{aligned}$$

Mengen: Aussagen und Konstruktionen

Konstruktionen für Mengen sind definiert durch Aussagen über ihre Elemente. Wie wir mit Aussagen richtig umgehen, wissen wir bereits. So können wir nun auch mengentheoretische Aussagen beweisen. Im Folgenden seien X, Y, X_i Mengen für $i \in I$ sowie $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $P(x)$ eine Aussage für $x \in X$.

Aussage / Menge	... ist definiert durch ...
$X \subseteq Y$	Inklusion $X \subseteq Y$ ist äquivalent zu $\forall u : (u \in X) \Rightarrow (u \in Y)$. Ein Beweis für $X \subseteq Y$ könnte daher wie folgt aussehen: Sei $u \in X$. Dann gilt ... und daher $u \in Y$. Das zeigt die Inklusion $X \subseteq Y$.
$X = Y$	Mengengleichheit $X = Y$ gilt genau dann, wenn $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$ gilt. Somit ist $X = Y$ äquivalent zu $\forall u : ((u \in X) \Rightarrow (u \in Y)) \wedge \forall u : ((u \in Y) \Rightarrow (u \in X))$, und dies bedeutet $\forall u : (u \in X) \Leftrightarrow (u \in Y)$.
$\{x \in X \mid P(x)\}$	Aussonderung: Es gilt $u \in \{x \in X \mid P(x)\}$ genau dann, wenn $u \in X \wedge P(u)$ gilt.
$\{f(x) \mid x \in X\}$	Ersetzung: Es gilt $y \in \{f(x) \mid x \in X\}$ genau dann, wenn $\exists x \in X : y = f(x)$ gilt.
$X \cap Y, \bigcap_{i \in I} X_i$	Schnitt: Es gilt $u \in X \cap Y$ gdw $u \in X \wedge u \in Y$. Es gilt $u \in \bigcap_{i \in I} X_i$ gdw $\forall i \in I : u \in X_i$.
$X \cup Y, \bigcup_{i \in I} X_i$	Vereinigung: Es gilt $u \in X \cup Y$ gdw $u \in X \vee u \in Y$. Es gilt $u \in \bigcup_{i \in I} X_i$ gdw $\exists i \in I : u \in X_i$.
$X \setminus Y$	Differenzmenge: Es gilt $X \setminus Y := \{u \in X \mid u \notin Y\}$, also $u \in X \setminus Y$ gdw $u \in X \wedge u \notin Y$.
$\mathfrak{P}(X)$	Potenzmenge: Es gilt $A \in \mathfrak{P}(X)$ genau dann, wenn $A \subseteq X$.
$f(A)$ für $A \subseteq X$	Bildmenge: Es gilt $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$, also $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A : y = f(x)$.
$f^{-1}(B)$ für $B \subseteq Y$	Urbildmenge: Es gilt $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$, also $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in X \wedge f(x) \in B$.

Beispiel aus der Aussagenlogik

Für Aussagen P, Q, R gilt $((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$.

Beweis: Wir zeigen zwei Implikationen. Es gelte die linke Seite, wir zeigen die rechte Seite. Angenommen es gilt P . Wir zeigen $Q \Rightarrow R$. Gelte also Q . Dann gilt auch $P \wedge Q$. Dank Annahme der linken Seite folgt R . Dies zeigt $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass die rechte Seite gilt. Sei $P \wedge Q$ wahr. Wir zeigen R . Da $P \wedge Q$ gilt, gilt auch P . Dank Annahme auf der rechten Seite folgt $Q \Rightarrow R$. Dank $P \wedge Q$ gilt auch Q , mit der Implikation $Q \Rightarrow R$ folgt R .

Beispiel aus der Mengenlehre

Ist $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung von Mengen, so gilt für alle $A \subseteq X$ die Inklusion $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Ist f injektiv, so gilt hier Gleichheit.

Beweis: Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung sowie $A \subseteq X$. Sei $x \in A$. Dann ist dank Definition des Bilds $f(x) \in f(A)$. Nach Definition des Urbilds folgt $x \in f^{-1}(f(A))$. Somit gilt $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

Sei nun f injektiv. Wir haben bereits die eine Inklusion gezeigt, daher reicht es zu zeigen, dass $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ gilt. Sei dazu $x \in f^{-1}(f(A))$. Nach Definition des Urbilds gilt $f(x) \in f(A)$. Das bedeutet, dass es ein $x_0 \in A$ gibt mit $f(x_0) = f(x)$. Dank Injektivität von f folgt $x_0 = x$ und daher $x \in A$.

Hilfreiches zum guten Schluss

Die folgenden Beweisstrategien lassen sich aus Äquivalenzen ableiten und werden häufig gebraucht, daher wollen wir sie hier betonen.

Vollständige Induktion

Die Aussage $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$ ist dank vollständiger Induktion äquivalent zu $P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Fallunterscheidung

Wie oben gilt $((P_1 \vee P_2) \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((P_1 \Rightarrow Q) \wedge (P_2 \Rightarrow Q))$: Sie folgern Q aus $P_1 \vee P_2$, indem Sie $P_1 \Rightarrow Q$ und $P_2 \Rightarrow Q$ zeigen. Ebenso für mehr als zwei Fälle.

Widerspruchsbeweis

Es gilt $P \Leftrightarrow (\neg P \Rightarrow (\neg Q \wedge Q))$: Um P zu zeigen, nehmen Sie $\neg P$ an und führen dies zum Widerspruch $(\neg Q \wedge Q)$. Das beweist, dass $\neg P$ falsch ist. Daraus schließen Sie P .

Kontraposition

Es gilt $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$: Um $P \Rightarrow Q$ zu zeigen, zeigen Sie stattdessen $\neg Q \Rightarrow \neg P$.